# Возбуждение резонаторов

Поле в резонаторе в том случае, когда отсутствуют возбуждающие токи, определяется уравнениями Максвелла:



## Материальные уравнения

Свойства материала в данной точке определяются соотношениями:



Здесь следует отметить одну вещь. В данном виде с соотношениями чрезвычайно неудобно работать, поэтому область определения функций , распространяют на всю числовую ось. Считая, что они равны нулю при :



Выполним преобразование Фурье по времени:



Для материальных уравнений отсюда следует система:



## Уравнения после преобразования Фурье



Здесь следует отметить одну вещь, из первых двух уравнений автоматически следуют два оставшихся, таким образом система уравнений сводится к:



## Закон сохранения энергии

Рассмотрим тождество:



Отсюда следует закон сохранения в форме:



Для систем с абсолютно проводящими стенками отсюда следует:



## Теорема единственности

Сформулируем теорему единственности для системы:



Пусть существует два решения:  удовлетворяющие системе и общим граничным условиям. Форма граничных выясниться позже. Разность также удовлетворяет системе и нулевым граничным, поэтому:



Из этого условия ничего не следует. Таким образом, для данных граничных условий и данной частоты может существовать несколько решений. Легко придумать пример – кубический резонатор. Одной и той же частоте в кубическом резонаторе может удовлетворять несколько мод!

## Теория возмущений

## Вариационный принцип

## Существование решений, спектр

## Ортогональность собственных колебаний

Функции и  удовлетворяют уравнениям:



Рассмотрим тождества:



Интегрируем по объёму и учитываем условие на идеальном проводнике:



Как было бы хорошо, если бы отсюда следовало общее соотношение, но нет получить его отсюда невозможно. Только в том случае, если диэлектрическую и магнитную проницаемости можно представить в форме произведения  и при этом компоненты  и  -- действительные функции, то есть в самом важном с точки зрения практики случае и  , отсюда можно получить, простые соотношения ортогональности:



В случае если  соотношение отлично от нуля, далее обозначим:



## Возбуждение резонаторов, амплитудные коэффициенты для преобразованных по Фурье компонент поля

Пусть резонатор возбуждается объёмными токами:



Будем искать решение в форме разложения по собственным модам:



Получаем систему:



Умножаем на  и интегрируем по объёму, учитываем:



Получаем:



Разрешаем систему:



Потенциал удовлетворяет уравнению:





Для пустого пространства:







Вместо коэффициентов  можно ввести коэффициенты  и :



Отсюда следует:



## Возбуждение резонаторов, амплитудные коэффициенты в зависимости от времени

Воспользуемся соотношением:







Для поля от координат и времени:



## Возбуждение резонаторов, уравнения возбуждения

Решение задачи в предыдущем случае, бесспорно, обладает и красотой и изяществом, но требуется знать плотности токов в каждый момент времени. Между тем, чаще всего плотность тока также представляет собой неизвестную функцию. По этой причине нужно знать не решения, а уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты. Получить их чрезвычайно просто. Приводим выражения для коэффициентов к виду:



Далее выполняем обратное преобразование Фурье:



Очень часто задачу о возбуждении ставят таким образом, что плотность тока является модулированной периодической функцией времени:



Решение ищут в виде:



Введённые таким образом коэффициенты удовлетворяют уравнениям возбуждения:

